

& GETAL & RUIMTE

A



Noordhoff Uitgevers

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute

2 Middenroute

3 Uitdagende route

NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶ GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶ WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

1	Tabellen en grafieken	6	3	Lineaire verbanden	104
	Beginopdracht De Triathlon van Maastricht	8		Beginopdracht Draf en galop	106
	Voorkennis Procenten	9		Voorkennis Haakjes wegwerken en vergelijkingen oplossen	107
1.1	Rekenen met procenten en verhoudingen	11	3.1	Lineaire formules	109
1.2	Maatsystemen	22	3.2	Lineaire formules vergelijken	117
1.3	Omgaan met tabellen	31	3.3	Lineaire formules opstellen	126
1.4	Informatie in grafieken	41	3.4	Lineaire vergelijkingen met twee variabelen	136
	Eindopdracht RUN Winschoten	49		Eindopdracht Man en paard	141
	Diagnostische toets	50		Diagnostische toets	142
2	De statistische cyclus	52	4	Handig tellen	144
	Beginopdracht Elektrisch rijden	54		Beginopdracht Spelbord ontwerp	146
	Voorkennis Centrummaten en frequentietabellen	55		Voorkennis Teldiagrammen	147
2.1	De onderzoeksvraag	57	4.1	Regels bij telproblemen	148
2.2	Data verzamelen	66	4.2	Permutaties en combinaties	156
2.3	Centrum- en spreidingsmaten	72	4.3	Allerlei telproblemen	165
2.4	Representatie van data	80		Eindopdracht Cirkelvormig spelbord	177
2.5	Conclusies trekken	91		Diagnostische toets	178
	Eindopdracht Nederlands energieverbruik	101			
	Diagnostische toets	102		Gemengde opgaven	180
				Formuleblad	203
				Overzicht GR-modules	204
				Overzicht routes	205
				Trefwoordenregister	209
				Verantwoording	211

3

Lineaire verbanden

Wat leer je?

- Hoe je een lineaire formule opstelt, ook in praktische situaties.
- Wat een recht evenredig verband is.
- Oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden.
- Problemen oplossen door een vergelijking op te stellen.
- Werken met lineaire vergelijkingen met twee variabelen.



Beginopdracht **Draf en galop**

Op de paardenrenbaan Duindigt in Den Haag vinden regelmatig draverijen plaats. De aangespannen paarden (de dravers) trekken een karretje (de sulky), dat wordt bestuurd door de pikeur. Tijdens een draverij kunnen paarden in draf snelheden van 45 km/uur bereiken.

Een paard dat tijdens de race in galop terechtkomt, wordt gediskwalificeerd.

Voor een paard is het niet natuurlijk om bij een snelheid van 45 km/uur in draf te gaan. Bij zo'n snelheid rent een paard normaal gesproken in galop. Door training kan een paard ook bij hoge snelheden door de pikeur in draf worden gehouden. Er bestaan formules die het aantal passen per minuut geven van een paard in draf en galop.

De formules $A_{\text{draf}} = 3,5v + 30$ en $A_{\text{galop}} = 0,5v + 90$ geven het verband tussen de snelheid v van het paard in km/uur en het aantal passen A per minuut.

- Het paard Winner gaat in draf en heeft een snelheid van 12 km/uur.
Bereken de paslengte.
- Het paard Misty gaat in draf en heeft een paslengte van 3,0 meter.
Onderzoek of bij een verdubbeling van de snelheid ook een verdubbeling van de paslengte hoort als Misty in draf blijft.

Onder natuurlijke omstandigheden zal een paard bij een bepaalde snelheid van draf overgaan in galop. Bij deze snelheid geven de twee formules hetzelfde aantal passen per minuut aan.

- Onderzoek met de formules bij welke snelheid de overgang van draf naar galop plaatsvindt.

Bij een draverij kunnen snelheden tot 45 km/uur voorkomen terwijl het paard nog steeds in draf is.

Het paard Happy gaat tijdens een draverij bij een snelheid van 45 km/uur over in galop. Voor Happy geldt de formule $A_{\text{galop}} = 0,5v + b$. Neem aan dat ook voor Happy geldt dat bij overgang van draf naar galop het aantal passen per minuut gelijk is.

- Bereken b .



paard in draf



paard in galop

Voorkennis Haakjes wegwerken en vergelijkingen oplossen

Theorie A Haakjes wegwerken

Je kunt $3x + 5x$ herleiden tot $8x$. En zo is $5x + x = 6x$ en $12x - 2x = 10x$. Maar $8x + 3y$ is niet te herleiden en ook $3x + 5$ kun je niet eenvoudiger schrijven. Je kunt alleen gelijksoortige termen samennemen.

Voor het wegwerken van haakjes heb je de volgende regels geleerd.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Voorbeeld

Werk de haakjes weg en herleid.

a $3(2x + 5)$

b $(2x + 3)5 - 7$

c $6 - (x - 3)$

Herleiden betekent zo eenvoudig mogelijk schrijven.

Uitwerking

a $3(2x + 5) = 6x + 15$

b $(2x + 3)5 - 7 = 10x + 15 - 7 = 10x + 8$

c $6 - (x - 3) = 6 - x + 3 = -x + 9$

1 Werk de haakjes weg en herleid.

a $2(3x + 1) + 2x$

d $3 - 5(x - 3)$

b $5(x - 3) + 7$

e $5(2x - 1) - (4x + 7)$

c $(2x + 5)3 + 3x$

f $-(2x - 1) + 4(2 - 3x)$

Theorie B Lineaire vergelijkingen oplossen

Een voorbeeld van een lineaire vergelijking is $5x + 2 = 37 - 2x$.

Hierin heet $5x + 2$ het linkerlid en $37 - 2x$ het rechterlid.

Je lost de vergelijking op door hem stap voor stap eenvoudiger te maken.

Je mag daarbij

- termen van het ene lid naar het andere lid brengen, maar dan moet je $-$ vervangen door $+$ en $+$ vervangen door $-$
- beide leden door hetzelfde getal delen of met hetzelfde getal vermenigvuldigen.

Het oplossen van de vergelijking $5x + 2 = 37 - 2x$ gaat als volgt.

$5x + 2 = 37 - 2x$ Termen met x naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid.

$5x + 2x = 37 - 2$ Herleid beide leden.

$7x = 35$ Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

$x = 5$

Dus $x = 5$ is de oplossing van de vergelijking $5x + 2 = 37 - 2x$.

Door $x = 5$ in de vergelijking in te vullen, kun je controleren dat het klopt: $5 \cdot 5 + 2 = 37 - 2 \cdot 5$. Inderdaad, het klopt, want je krijgt $27 = 27$.

Let op het verschil tussen $x + 4 = 20$, $x - 4 = 20$ en $4x = 20$.

$x + 4 = 20$ $x = 20 - 4$ $x = 16$	$x - 4 = 20$ $x = 20 + 4$ $x = 24$	$4x = 20$ $x = \frac{20}{4}$ $x = 5$
--	--	--

Staan er in een lineaire vergelijking haakjes, werk die dan eerst weg.

Zo krijg je bij $3(x - 3) = x + 8$ eerst $3x - 9 = x + 8$. Enzovoort.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk zo nodig de haakjes weg.
- 2 Breng de termen met de variabele naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid, en herleid beide leden.
- 3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Voorbeeld

Los op.

a $3(x - 3) = x + 8$

b $5 - (x + 2) = 11 - 3x$

Uitwerking

a $3(x - 3) = x + 8$

$3x - 9 = x + 8$

$2x = 17$

$x = 8\frac{1}{2}$

b $5 - (x + 2) = 11 - 3x$

$5 - x - 2 = 11 - 3x$

$2x = 8$

$x = 4$

2 Los op.

a $x + 5 = 20$

b $5x = 20$

c $6x - 2 = 2x + 18$

d $5 - x = 2x - 1$

3 Los op.

a $2(x - 1) = 3(x + 2)$

b $3(x - 80) = 100 - x$

c $5 - (x + 1) = 15 - 3x$

d $2(x - 3) - 7 = 3(x - 6) + 18$

e $8 - 3(2x - 1) = 3 + 2(1 - x)$

f $1,8x + 0,6 = -1,2x + 3$

3.1 Lineaire formules

01
☐⊗*

Gegeven zijn vier lineaire formules en de bijbehorende grafieken.

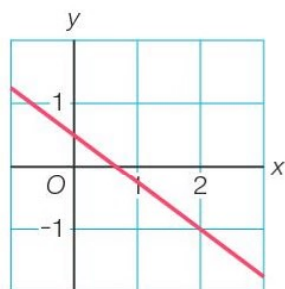
Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

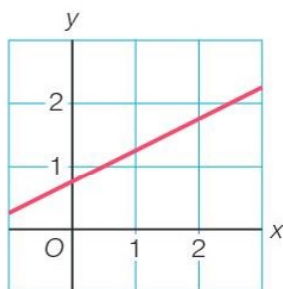
II $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

III $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

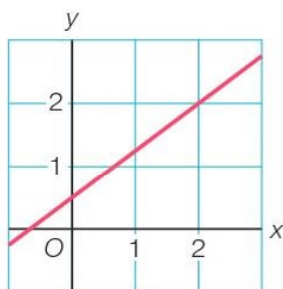
IV $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



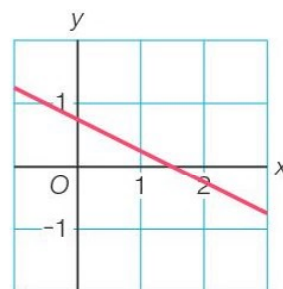
A



B



C



D

figuur 3.1

Theorie A Richtingscoëfficiënt

In de figuur hiernaast is de lijn l : $y = \frac{1}{2}x + 2$ getekend.

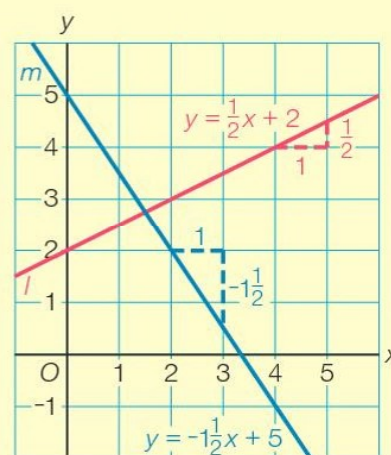
De grafiek van de **lineaire formule** $y = \frac{1}{2}x + 2$ is de lijn waarvoor geldt

- het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$
- ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{1}{2}$ omhoog.

Het getal $\frac{1}{2}$ in de formule $y = \frac{1}{2}x + 2$ heet de **richtingscoëfficiënt** van l . Notatie: $rc_l = \frac{1}{2}$.

Van de lijn m : $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ is de richtingscoëfficiënt gelijk aan $-1\frac{1}{2}$. Dus $rc_m = -1\frac{1}{2}$. Dit betekent: ga je 1 naar rechts, dan ga je $-1\frac{1}{2}$ omhoog.

Dat is hetzelfde als 1 naar rechts en $1\frac{1}{2}$ omlaag
en ook hetzelfde als 2 naar rechts en 3 omlaag.



figuur 3.2

Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a .

$rc = a$ betekent 1 naar rechts en a omhoog.

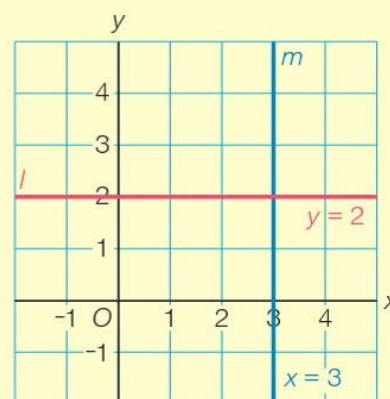
De lijn $y = ax + b$ snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.

De lijnen p : $y = 3x - 5$ en q : $y = 3x + 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt. Daarom zijn de lijnen p en q evenwijdig.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

Van de lijn l in figuur 3.3 is $rc_l = 0$. Immers, ga je 1 naar rechts, dan ga je 0 omhoog. Dus de formule van l is $y = 0x + 2$. Hiervoor schrijven we kortweg $y = 2$. Op de lijn $y = 2$ liggen alle punten met y -coördinaat 2.

Op de verticale lijn m in figuur 3.3 liggen alle punten met de x -coördinaat 3. Daarom zeggen we dat de lijn m de formule $x = 3$ heeft. Een verticale lijn heeft geen richtingscoëfficiënt.



figuur 3.3

De lijn $y = 5$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 5)$.

Alle punten op deze lijn hebben y -coördinaat 5.

De lijn $x = 6$ is de verticale lijn door het punt $(6, 0)$.

Alle punten op deze lijn hebben x -coördinaat 6.

Voorbeeld

Teken in één figuur de lijnen $l: y = -0,8x + 3$, $m: y = 3$ en $n: x = 4$.

Aanpak

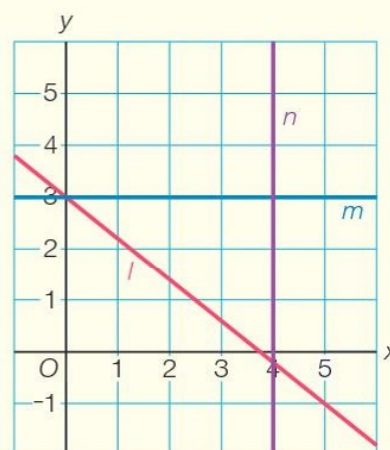
Maak bij l een tabel met twee punten. Neem in elk geval $x = 0$.

Verder is m de horizontale lijn door $(0, 3)$ en n de verticale lijn door $(4, 0)$.

Uitwerking

x	0	5
y	3	-1

Zie figuur 3.4.



figuur 3.4

2 Gegeven zijn de lijnen $k: y = -3x + 2$, $m: y = \frac{1}{2}x - 1$, $p: y = 2$ en $q: y = 2x$.



a Teken deze lijnen in één figuur.

b Schrijf van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt op. Begin met $rc_k = \dots$

3 Gegeven zijn de lijnen



- l met $rc_l = 2$ die door $A(0, -1)$ gaat
- m met $rc_m = -0,4$ die door $B(0, 2)$ gaat
- n met $rc_n = -1$ die door $O(0, 0)$ gaat.

a Teken deze lijnen in één figuur.

b Schrijf van elk van deze lijnen de formule op. Begin met $l: y = \dots$

4

Gegeven zijn de lijnen k , l en m die door het punt $A(0, 1)$ gaan met $rc_k = 3$, $rc_l = 1$ en $rc_m = -1\frac{1}{2}$.

- Teken deze lijnen in één figuur.
- Schrijf van elk van deze lijnen de formule op.
- Teken door het punt $B(0, 4)$ de lijn n die evenwijdig is met m en schrijf van n de formule op.

A5

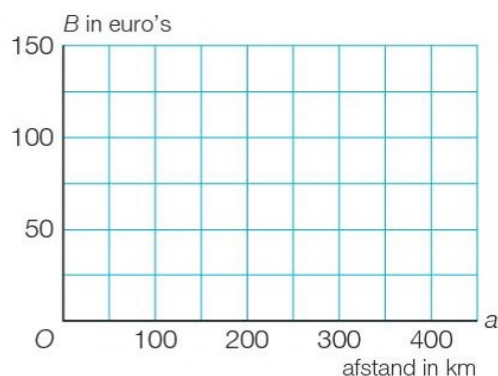
Gegeven zijn de lijnen k : $y = 0,6x - 3$, l : $y = -1,5x + 4$ en m met $rc_m = 2,5$ die door het punt $(0, -6)$ gaat.

- Teken k , l en m in één figuur.
- Teken de lijn n die door de oorsprong gaat en evenwijdig is met k . Wat is de formule van n ?
- De lijn k snijdt de x -as in het punt A . De lijn p gaat door A en is evenwijdig met de y -as. Stel de formule van p op.
- De lijn l snijdt de y -as in het punt B . De lijn q gaat door B en is evenwijdig met de x -as. Stel de formule van q op.

6

Bij autoverhuurbedrijf Rent-a-car kun je voor één dag een bestelauto huren. Met de formule $B = 0,15a + 80$ kun je berekenen hoeveel euro je moet betalen als je a km rijdt.

- Hoeveel euro moet je betalen bij een afstand van 50 km?
- Bij de grafiek hoort een assenstelsel zoals in figuur 3.5. Hoe zie je aan de formule dat de a -as de horizontale as is?
- Teken de grafiek. Waarom mag je niet links van de B -as tekenen?
- In de formule staan twee getallen. Welke informatie geeft 0,15 over het verhuurtarief? En welke informatie geeft 80?



figuur 3.5

Autoverhuurbedrijf Cheap rekent een vast bedrag van 90 euro en een bedrag van 11 cent per km.

- Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat je bij Cheap betaalt als je a km rijdt en teken de grafiek van B in de figuur van vraag c.
- Welk bedrijf is het voordeligst bij een rit van 150 km? Hoeveel scheelt het?
- Vanaf welk aantal km is Cheap voordeliger dan Rent-a-car?

7

Teken in een assenstelsel met een horizontale t -as en een verticale N -as de lijnen l : $N = t - 2$, m : $N = 3 - \frac{1}{2}t$ en n : $N = \frac{1}{3}t - 2$.

A8
□ ⊙ *

Bij de productie van artikelen onderscheidt men twee soorten kosten, namelijk de *vaste kosten* en de *variabele kosten*. De vaste kosten zijn onafhankelijk van de productieomvang. Bijvoorbeeld de kosten van de machines en de huur van de bedrijfsruimte. De variabele kosten hangen af van de productieomvang. Bijvoorbeeld de kosten van grondstoffen, materialen en arbeid.

Een firma produceert balpennen. De kosten K in euro's die per dag gemaakt worden voor het produceren van q balpennen zijn gegeven door de formule $K = 0,25q + 200$.

a Hoeveel zijn de vaste kosten? En hoeveel zijn de variabele kosten per balpen?

Na verloop van tijd veranderen de variabele kosten in 0,30 euro per balpen, de vaste kosten blijven gelijk.

b Stel de nieuwe formule van de kosten op.

Weer enige tijd later veranderen de vaste kosten in 400 euro per dag. De variabele kosten blijven 0,30 euro per balpen.

c Stel voor deze nieuwe situatie de formule op van de kosten.

d Welke invloed heeft een stijging van de variabele kosten op de grafiek? En welke invloed heeft een stijging van de vaste kosten op de grafiek?

E9
□ ⊙ *

De lijnen k , l en m gaan door het punt $A(0, 1)$. Er geldt $rc_l = \frac{3}{4} \cdot rc_k$ en $rc_m = \frac{1}{2} \cdot rc_k$. De snijpunten van k , l en m met de lijn $x = 6$ zijn achtereenvolgens B , C en D . De y -coördinaat van het punt B is 19. Bereken de afstand tussen de punten C en D .

O10
□ ⊙ *

In een cilindervormig vat staat het water 1,2 meter hoog. Na opening van een kraan stroomt het vat met constante snelheid leeg. Per kwartier daalt het waterpeil met 30 cm.

Stel de formule op van de waterhoogte h in cm t minuten na het openen van de kraan.

Theorie B Een lineaire formule opstellen bij een tekst

Het is belangrijk dat je bij allerlei situaties lineaire formules kunt opstellen. Soms volgt zo'n formule uit de tekst. Let daarbij op de gevraagde eenheden. Zo is in opgave 10 de waterhoogte h in cm terwijl de beginhoogte gegeven is in meter. Omdat de tijd t in minuten is, reken je de afname van 30 cm per kwartier om naar een afname van 2 cm per minuut. Dus de richtingscoëfficiënt is -2 .

- 11** Bij het produceren van boeken is er een lineair verband tussen de productiekosten K in euro's per boek en het aantal pagina's x in het boek. Volgens een uitgever moet je rekenen op een vast bedrag van €2,50 per boek aan kosten. Verder zijn de kosten 10 cent per vijf pagina's.
- a** Stel de formule op van K voor het produceren van een boek met x pagina's.
 - b** Martijn beweert dat de productiekosten verdubbelen als het aantal bladzijden verdubbelt. Geef commentaar.

- A12**
- a** Aan het wateroppervlak heerst een druk van 1015 hPa. Onder water neemt per 10 meter de druk met 1000 hPa toe. Stel de formule op van de druk P in hPa op een waterdiepte van d meter.
 - b** Op 1 januari 2018 was er 5,5 miljoen km² tropisch regenwoud in het Amazonegebied. Door menselijk handelen neemt de oppervlakte hiervan dagelijks met 2200 ha af. Neem aan dat deze afname zich de komende jaren voortzet. Stel de formule op van de oppervlakte A aan tropisch regenwoud in het Amazonegebied t jaar na 1 januari 2018. Neem A in miljoenen ha en rond in het antwoord af op één decimaal.
 - c** Een parachutist opent zijn parachute op een hoogte van 600 meter en daalt met een snelheid van 18 km/uur. Stel de formule op van de hoogte h in meter t seconden na het openen van de parachute.

- A13**
- Tim en Jelmer gaan naar een concert in Nijmegen. Jelmer gebruikt een taxi van taxibedrijf A om bij het concert te komen. Voor deze rit van 12 km betaalt Jelmer €25,80 en geen instaptarief. Tim gebruikt een taxi van taxibedrijf B. Hij betaalt €12,40 voor zijn rit van 5 km, dat is inclusief het instaptarief van €1,95. Bij beide taxibedrijven bestaat er een lineair verband tussen de kosten K in euro's en de afstand d van de rit in km. Tim had ook voor taxibedrijf A kunnen kiezen en Jelmer voor B. Bereken voor beide of dat voordeliger was geweest.

- E14**
- Jannie moet 40 opgaven als huiswerk maken. Om haar te stimuleren belooft haar moeder 50 cent voor elke opgave die ze goed doet. Maar voor elke fout gemaakte opgave gaat er 1 euro af. Ze maakt alle opgaven.
- a** Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat Jannie krijgt als ze x opgaven goed maakt.
 - b** Jannie krijgt uiteindelijk 2 euro van haar moeder. Hoeveel opgaven had Jannie goed?

Gegeven is de verhoudingstabel hiernaast.

- a** Teken de grafiek bij deze verhoudingstabel.
Welke bijzonderheid heeft de grafiek?
- b** Welke formule hoort bij de grafiek? Kies uit
 $y = 0,4x + 1$, $y = 0,4x$ en $y = x + 0,4$.

x	1	3	5	8	10
y	0,4	1,2	2	3,2	4

Theorie C Recht evenredig

Een machine produceert 140 flessen per minuut. De verhoudingstabel hiernaast past bij deze situatie.

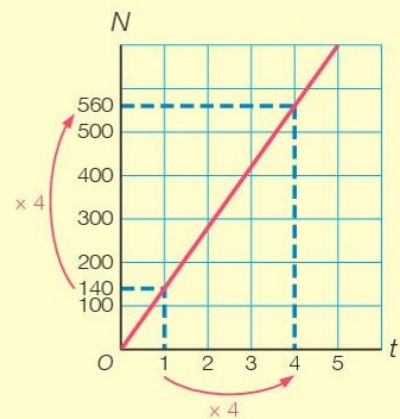
tijd t in minuten
aantal flessen N

1	2	3	4	...
140	280	420	560	...

De grafiek die bij deze verhoudingstabel hoort, zie je in figuur 3.6. De grafiek is een rechte lijn door het punt $O(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 140. Hierbij hoort de lineaire formule $N = 140t$.

Vermenigvuldig je in de verhoudingstabel de tijd t met een getal k , dan moet je N ook met k vermenigvuldigen. We zeggen dat N **evenredig** is met t . In plaats van N is evenredig met t zeggen we ook N is **recht evenredig** met t .

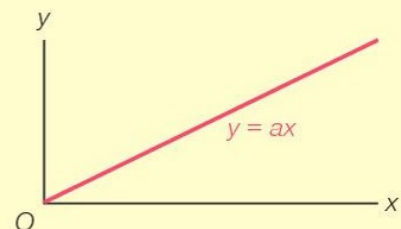
Een lineair verband $y = ax + b$ waarbij $b = 0$, is een evenredig verband.



figuur 3.6

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een lijn door de oorsprong.



Voorbeeld

Gegeven is dat N evenredig is met t . Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
Stel de formule van N op en bereken N voor $t = 15$.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} N = at \\ t = 12 \text{ en } N = 99 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 12 = 99 \\ 12a = 99 \\ a = 8,25 \end{array}$$

Dus $N = 8,25t$.

$t = 15$ geeft $N = 8,25 \cdot 15 = 123,75$

R16
☐⊙*

Welke van de volgende beweringen is waar? Licht toe.

- Bewering I Als N evenredig is met t , dan bestaat er een lineair verband tussen N en t .
- Bewering II Als er een lineair verband bestaat tussen N en t , dan is N evenredig met t .

17
☐

Gegeven is dat y evenredig is met x .

- a** Voor $x = 15$ is $y = 24$.
Stel de formule van y op en bereken y voor $x = 60$.
- b** Voor $x = 6$ is $y = 3,6$.
Stel de formule van y op en bereken x voor $y = 30,6$.

18
☐⊙

De bewoners van appartementencomplex 'Zuiderwal' hebben te maken met gemeenschappelijke servicekosten. De afspraak is deze kosten evenredig te verdelen op basis van de vloeroppervlakte.

De familie Akker heeft een appartement met een vloeroppervlakte van 84 m^2 . Ze betalen jaarlijks 1890 euro aan servicekosten.

- a** Stel de formule op van de jaarlijkse servicekosten K in euro's bij een vloeroppervlakte van $A \text{ m}^2$.
- b** De familie De Winter betaalt per jaar 2700 euro aan servicekosten. Hoeveel is de vloeroppervlakte van hun appartement?
- c** Het appartement van de familie Klecker heeft een vloeroppervlakte van 75 m^2 , dat is 1,2% van de totale vloeroppervlakte van het complex. Bereken de jaarlijkse servicekosten van het gehele appartementencomplex.

19
⊙*

Een bij moet maar liefst 6250 km afleggen om tot een productie van 50 gram honing te komen. Ga ervan uit dat de productie honing h in gram evenredig is met de afgelegde afstand d in km.

- a** Stel de formule van h op.
- b** Een bij legt in zijn leven een afstand van 40 000 km af, dat is ongeveer de omtrek van de aarde. Hoeveel is de totale honingproductie van deze bij?

A20
☐⊙*

In woningen gaat veel warmte verloren via de ramen. Het warmteverlies is evenredig met de oppervlakte van het raam.

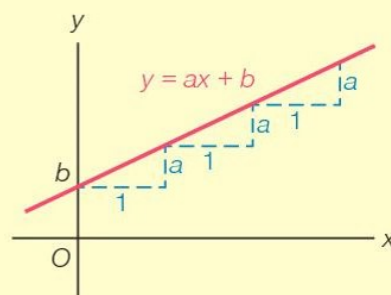
In de woning van de familie Huisman gaat op een winterse dag door een raam met een oppervlakte van 3 m^2 per uur gemiddeld 1,2 MJ (= 1,2 miljoen Joule) aan warmte verloren.

- a** Stel de formule op van het warmteverlies Q in MJ per uur op een winterse dag door een raam met een oppervlakte van $A \text{ m}^2$.
- b** Een raam heeft een oppervlakte van $1,8 \text{ m}^2$, dat is 12% van de totale glasoppervlakte van de woning. Hoeveel MJ warmte gaat er op een winterse dag via de ramen verloren?

Terugblik

Lineaire formules

Bij een lineair verband tussen x en y hoort als grafiek een rechte lijn. De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$. Hierin is a de richtingscoëfficiënt. $rc = a$ betekent 1 naar rechts en a omhoog. Het snijpunt van de lijn met de y -as is het punt $(0, b)$.



Grafiek tekenen bij een lineaire formule

Om de lijn $l: y = -0,5x + 2$ te tekenen, maak je een tabel met twee punten, bijvoorbeeld zoals hiernaast.

x	0	2
y	2	1

Horizontale en verticale lijnen

De formule $y = 3$ hoort bij de horizontale lijn door het punt $(0, 3)$.

De formule $x = 2$ hoort bij de verticale lijn door het punt $(2, 0)$.

Lineaire formules opstellen

In 1998 was de gemiddelde lengte van volwassen vrouwen in Nederland 1,68 meter. In 20 jaar tijd is de gemiddelde lengte met 6 mm toegenomen. Ga uit van een lineair verband.

Je stelt als volgt de formule op van de gemiddelde lengte L in cm t jaar na 1998.

Reken de toename van 6 mm per 20 jaar om naar een toename van $\frac{0,6}{20} = 0,03$ cm per jaar. De richtingscoëfficiënt is dus 0,03.

Bij $t = 0$ is de lengte 168 cm. Je krijgt $L = 0,03t + 168$.

Recht evenredig

Bij y is evenredig met x geldt

- de formule heeft de vorm $y = ax$
- vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen
- de grafiek is een lijn door de oorsprong.

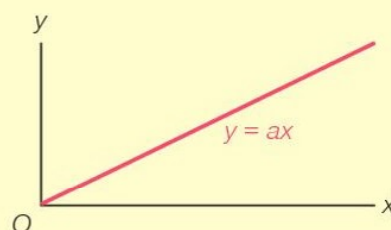
Het bedrag B in euro's dat Sabine verdient bij de supermarkt is evenredig met het aantal uur t dat ze werkt.

Voor 4 uur werken krijgt ze 17 euro.

De formule van B krijg je als volgt.

$$\left. \begin{array}{l} B = at \\ t = 4 \text{ en } B = 17 \end{array} \right\} a \cdot 4 = 17, \text{ dus } a = 4,25$$

Dus $B = 4,25t$.



3.2 Lineaire formules vergelijken

021
□ ⊗ *

Jelmer maakt gebruik van taxibedrijf A dat het tarief berekent met de formule $K = 2,15d$. Tim maakt gebruik van taxibedrijf B dat het tarief berekent met de formule $K = 2,09d + 1,95$. In deze formules zijn K de kosten in euro's bij een rit van d km.

Om te berekenen bij welke afstand de taxibedrijven even duur zijn, los je de vergelijking $2,15d = 2,09d + 1,95$ op.

- Licht dit toe.
- Bereken bij welke afstand de taxibedrijven even duur zijn.



Theorie A Vergelijkingen oplossen

Bij het oplossen van een **lineaire vergelijking** zoals $15t - 45 = 7t + 5$ of $\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}(x - 6)$ werk je stap voor stap naar het antwoord toe.

Bij de vergelijking $15t - 45 = 7t + 5$ gaat dat als volgt.

$$15t - 45 = 7t + 5 \quad \text{Breng } 7t \text{ naar links en } -45 \text{ naar rechts.}$$

$$15t - 7t = 5 + 45 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$8t = 50 \quad \text{Deel door het getal dat voor } t \text{ staat.}$$

$$t = \frac{50}{8} = 6,25$$

Bij het oplossen van $\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}(x - 6)$ ga je als volgt te werk.

$$\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}(x - 6) \quad \text{Werk de haakjes weg.}$$

$$\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}x - 4 \quad \text{Breng } \frac{2}{3}x \text{ naar links en } 5 \text{ naar rechts.}$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x = -4 - 5 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$-\frac{1}{3}x = -9 \quad \text{Deel door het getal dat voor } x \text{ staat.}$$

$$x = \frac{-9}{-\frac{1}{3}} = 27$$

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- Werk zo nodig de haakjes weg.
- Breng de termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
- Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Voorbeeld

Los op. Rond af op één decimaal.

a $0,5x - 2,2 = -3(x - 20) + 5,1$

b $500q = -20(11q - 4250)$

Uitwerking

a $0,5x - 2,2 = -3(x - 20) + 5,1$

$$0,5x - 2,2 = -3x + 60 + 5,1$$

$$3,5x = 67,3$$

$$x \approx 19,2$$

b $500q = -20(11q - 4250)$

$$500q = -220q + 85\,000$$

$$720q = 85\,000$$

$$q \approx 118,1$$

22 Los op. Rond af op één decimaal.



a $5(x - 3) = 2,1x - 4$

b $5t - 16 = 2(t - 8) + 17$

c $0,31p + 1,81 = 0,04p + 5,12$

d $\frac{1}{4}x + 3 = x + 11$

23 Los op. Rond af op één decimaal.



a $320q + 1000 = 8000 - 120q$

b $37,5x + 125 = -5x + 214,2$

c $1\frac{1}{2}(3t + 8) = 5t - 3\frac{1}{3}$

d $-0,38a + 2,88 = 7,31 - 0,06(a - 8)$

24 Los op. Rond af op één decimaal.



a $7q - 20 = 0,25(2q - 3) - 8$

b $5(a - 7) = 15a - (4a - 21)$

c $1 - 2\frac{1}{4}(p + 6) = p + 8$

d $0,18(q - 16) = 0,05q + 15,2$

25 Gegeven zijn de lijnen $l: y = -0,8x + 3$ en $m: y = 1,7x - 4,25$. Zie figuur 3.7.



a Welke vergelijking moet je oplossen om de x -coördinaat van het snijpunt S te berekenen?

b Bereken de coördinaten van S .

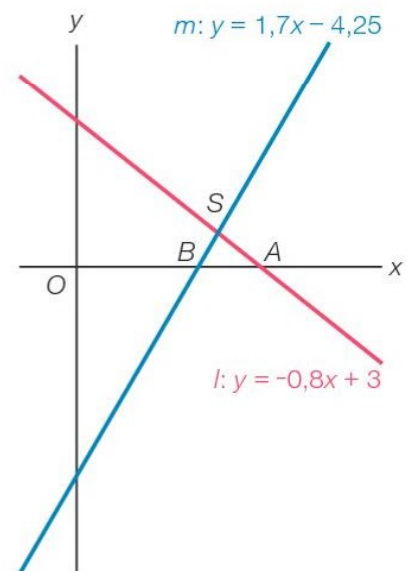
De lijn l snijdt de x -as in het punt A .

c Welke vergelijking moet je oplossen om de x -coördinaat van het punt A te berekenen?

d Bereken de coördinaten van A .

e De lijn m snijdt de x -as in het punt B .

Bereken de coördinaten van B .



figuur 3.7

26 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen



a $k: y = 2(x - 3)$ en $l: y = 5 - 3x$

b $m: y = -2\frac{1}{2}x + 5$ en $n: y = 25$.

A27 Gegeven is de lijn n : $y = -2,5x + 35$.



- a** De lijn n snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .
Bereken de coördinaten van de punten P en Q .
- b** Op n ligt het punt R met x -coördinaat $x_R = -20$.
Bereken de y -coördinaat y_R .
- c** Op n ligt het punt S met y -coördinaat $y_S = 45$.
Bereken de x -coördinaat x_S .
- d** Op n ligt het punt T waarvan de x -coördinaat gelijk is aan de y -coördinaat.
Bereken de coördinaten van het punt T .

A28 Veel mensen zijn benieuwd naar hun ideale gewicht. Er zijn



verschillende formules in gebruik om het ideale gewicht G in kg te berekenen, zoals de formules van Lorenz-Vandervael. Voor vrouwen is die formule $G = 0,6l - 40$ en voor mannen $G = 0,7l - 55$. Hierin is l de lengte in cm.

Is het gewicht tussen 110% en 130% van G , dan is er sprake van matig overgewicht. Ernstig overgewicht heb je boven 140% van G .

- a** Marloes heeft een ideaal gewicht van 65 kg.
Bereken hoe lang ze is.
- b** Koen is 1,80 meter lang. Hij heeft ernstig overgewicht.
Wat weet je van zijn gewicht?
- c** Rob en Lotte zijn even lang en hebben beide een ideaal gewicht.
Rob is 3 kg zwaarder dan Lotte.
Bereken de lengte van Lotte.

E29 Karel maakt rijtjes van vijf opeenvolgende positieve gehele getallen met de eigenschap: de som van drie van deze getallen is gelijk aan de som

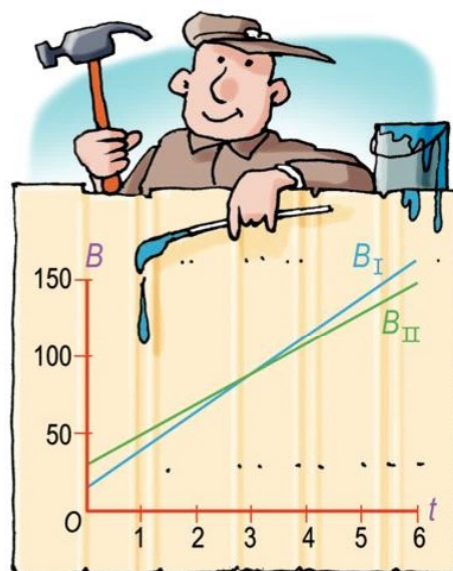


van de andere twee.
Welke twee rijtjes maakt Karel?

O30 Klusjesman I hanteert als tarief voor het uitvoeren van zijn werkzaamheden de formule $B_I = 25t + 15$. Bij klusjesman II is dat $B_{II} = 20t + 29,5$. Hierin is B het bedrag in euro's en t het aantal uren dat ze met de klus bezig zijn.



- a** Welke informatie geven de getallen 25 en 15 in de formule van klusjesman I?
- b** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken. Welke informatie geven deze twee getallen?
- c** Voor welke aantallen uren is klusjesman I goedkoper dan klusjesman II?



Theorie B Lineaire ongelijkheden oplossen

Bij bedrijven die op verschillende manieren hun tarieven berekenen, kun je je afvragen welk bedrijf het voordeligste is.

De reparatiebedrijven I en II hanteren de tarieven

$B_I = 25t + 82$ en $B_{II} = 30t + 55$. Hierin is B het bedrag in euro's en t de reparatietijd in uren. Zie figuur 3.8.

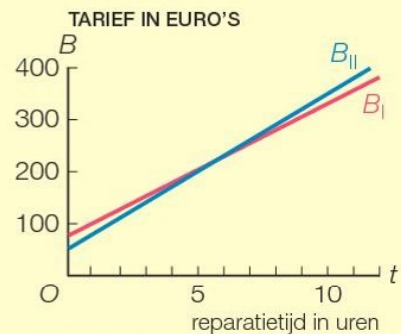
Om te onderzoeken voor welke t bedrijf I voordeliger is dan bedrijf II los je de **lineaire ongelijkheid** $B_I < B_{II}$ op.

Dus $25t + 82 < 30t + 55$. Je gaat als volgt te werk.

- Bereken de t -coördinaat van het snijpunt door de vergelijking $25t + 82 = 30t + 55$ op te lossen.
Je krijgt $t = 5,4$.
- Kijk in de figuur voor welke waarden van t geldt dat B_I kleiner is dan B_{II} . Je ziet dat dit het geval is voor $t > 5,4$.

Dus bedrijf I is voordeliger dan bedrijf II voor $t > 5,4$.

De oplossing van de lineaire ongelijkheid $25t + 82 < 30t + 55$ is dus $t > 5,4$.



figuur 3.8

Voorbeeld

IJssalon Sophia hanteert voor de opbrengst R in euro's de formule $R = 2,25q$. Hierin is q het aantal verkochte ijsjes per week. De kosten K in euro's zijn $K = 1,15q + 352$. Zie figuur 3.9.

Hoeveel ijsjes moet Sophia per week verkopen om winst te maken?

Uitwerking

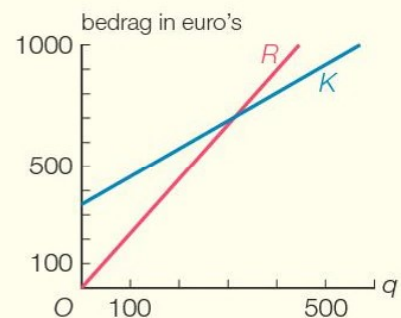
Sophia maakt winst als $R > K$, dus $2,25q > 1,15q + 352$.

Los op $2,25q = 1,15q + 352$

$$1,10q = 352$$

$$q = 320$$

Zie de figuur. Sophia moet meer dan 320 ijsjes per week verkopen.



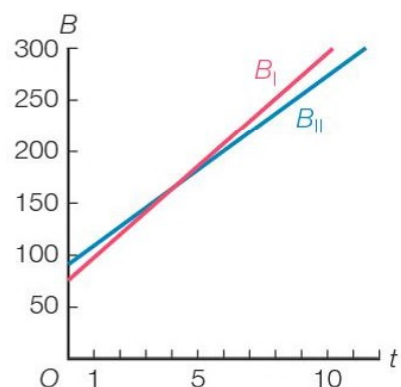
figuur 3.9



De reparatiebedrijven I en II gebruiken de tarieven

$B_I = 22t + 80$ en $B_{II} = 18t + 96$. Hierbij is B het bedrag in euro's en t de reparatietijd in uren.

Onderzoek bij welke reparatietijden bedrijf I voordeliger is dan bedrijf II.

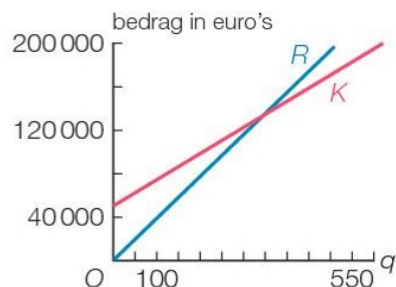


figuur 3.10

32
  *

Een fabrikant van wasmachines rekent per week op 50000 euro aan vaste kosten en een bedrag van 250 euro aan variabele kosten per machine. Hij verkoopt de machines voor 400 euro per stuk.

- Stel de formule op van de kosten K en van de opbrengst R bij een productie van q machines per week.
- Bij welke productie q maakt de fabrikant winst?



figuur 3.11

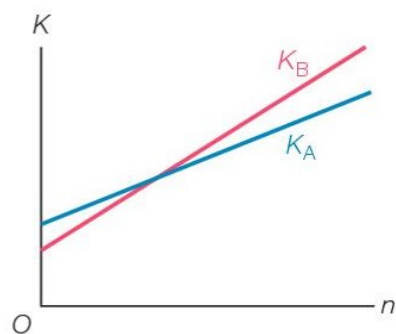
A33
  *

Nienke overweegt lid te worden van een golfclub. Golfclub Andantino rekent een contributie van €435,- per jaar. Daarbij komt €12,- per keer golfen. De contributie bij golfclub Bastion is €350,- per jaar, vermeerderd met €17,50 per keer golfen. Neem aan dat Nienke per jaar n keer gaat golfen.

- Stel de formule op van de jaarlijkse kosten K_A in euro's als Nienke voor Andantino kiest. Doe dat ook voor de jaarlijkse kosten K_B bij Bastion.

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van K_A en K_B getekend.

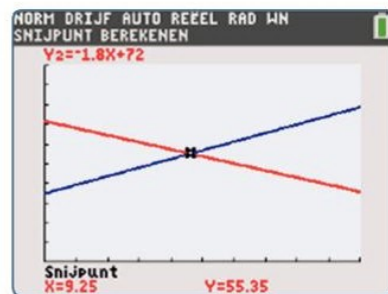
- Bij hoeveel keer golfen per jaar adviseer je Nienke lid te worden van Andantino?
- Nienke wil niet meer dan €600,- kosten per jaar hebben. Welk advies geef je nu?



figuur 3.12

034
  *

Hiernaast zie je de grafieken van de formules $y = 2,2x + 35$ en $y = -1,8x + 72$ op het scherm van de grafische rekenmachine (GR). Ook zijn met de GR de coördinaten van het snijpunt berekend. Je ziet dat het snijpunt (9,25; 55,35) is. Wat is de oplossing van de ongelijkheid $2,2x + 35 > -1,8x + 72$?



Theorie C Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met de GR

Bij een gegeven formule kun je de grafische rekenmachine (GR) de grafiek laten tekenen. Het laten tekenen van een grafiek door de GR heet **plotten**.

Heb je twee grafieken geplot die een snijpunt hebben, dan kun je de GR de coördinaten van het snijpunt laten berekenen. De x -coördinaat van het snijpunt is de oplossing van de vergelijking die je krijgt als je de formules aan elkaar gelijk stelt. Je kunt de geplotte grafieken en het snijpunt gebruiken om een ongelijkheid op te lossen.

Neem eerst de volgende module door.

[► GR] In de module **Formules, grafieken en snijpunten** leer je hoe je formules op de GR invoert, grafieken plot en de coördinaten van snijpunten berekent.

Gebruik je opties van de GR bij het oplossen van een probleem, dan is alleen een antwoord niet voldoende. Hieronder zie je aan welke voorwaarden de uitwerking moet voldoen.

Uitwerking bij gebruik van de GR

- 1 Noteer de formules die je invoert, dus schrijf op $y_1 = \dots$ en $y_2 = \dots$
- 2 Noteer de optie(s) die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Een moeilijkheid bij het werken met grafieken op de GR is het vaststellen tussen welke waarden je x en y moet nemen om de grafieken goed op het scherm te krijgen. We komen daar in een volgend hoofdstuk op terug. Voor nu neem je in elke opgave x tussen 0 en 20 en y tussen 0 en 100, tenzij anders vermeld.

Voorbeeld

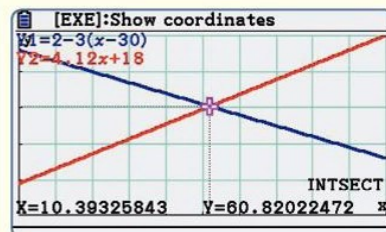
Bereken voor welke t geldt dat $2 - 3(t - 30) < 4,12t + 18$. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

Voer in $y_1 = 2 - 3(x - 30)$ en $y_2 = 4,12x + 18$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 10,39$.

Uit de plot volgt dat $t > 10,39$.



35

Los de volgende ongelijkheden op. Rond af op twee decimalen.

a $3,68x + 25 > 10 - 4(x - 20)$

b $95 - 5,12x < 12 + 3,25(2x - 1)$

36
□ ⊗ *

a Gegeven zijn de formules $N = 5,06t + 14,5$ en $M = 83,4 - 1,34t$. Bereken voor welke waarden van t geldt dat $N < M$. Rond af op twee decimalen.

b Gegeven zijn de formules $F = \frac{400 - 3q}{5,11}$ en $G = \frac{320 + 9q}{6,85}$.

Bereken voor welke waarden van q geldt dat $F > G$. Rond af op twee decimalen.

37
□ ⊗ *

Rond in deze opgave af op twee decimalen.

Gegeven zijn de formules $A = 5,15d + 25$, $B = 8,35d + 8,16$ en $C = \frac{10,09d + 155}{3,5}$.

a Bereken voor welke waarden van d geldt dat $B > C$.

b Bereken voor welke waarden van d geldt dat $A < B$ en bovendien $A < C$.

c Bereken voor welke waarden van d geldt dat $A < B < C$.

$A < B < C$ betekent
 $A < B$ en $B < C$.

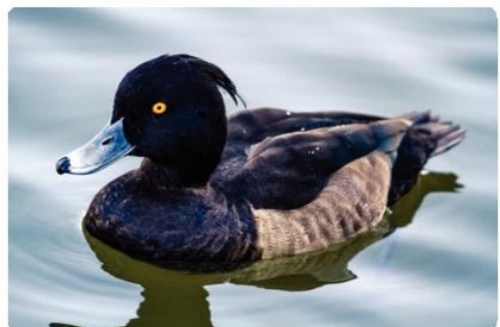
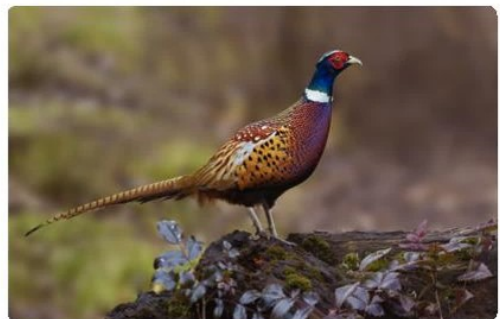
A38
□ ⊗ *

In 1990 waren er 50 000 broedparen patrijzen in Nederland. In dat jaar waren er in Nederland 44 000 broedparen fazanten en 15 000 broedparen kuifeenden.

Het aantal broedparen patrijzen is sindsdien jaarlijks met 1600 afgenomen. Ook het aantal broedparen fazanten nam af, namelijk met 800 broedparen per jaar. Het aantal broedparen kuifeenden is echter jaarlijks toegenomen met 300 broedparen per jaar.

a Stel de formule op van het aantal broedparen patrijzen P , van het aantal broedparen fazanten F en van het aantal broedparen kuifeenden K . Neem P , K en F in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.

b Onderzoek met behulp van grafieken in welke jaren er minder broedparen patrijzen dan fazanten in Nederland waren, maar wel meer broedparen patrijzen dan kuifeenden.



Baarzen kunnen leven in water waarvan de temperatuur maximaal 25°C is. Bovendien hebben ze minstens 2 mg zuurstof per liter water nodig. We bekijken in deze opgave baarzen die leven in een meer waarvan de diepte 4 meter is.

Aan het begin van een lange hete zomer is op 1 juli de temperatuur van het water alleen aan de oppervlakte 25°C . Gedurende de zomer komt de diepte waarop de temperatuur 25°C is elke drie dagen 10 cm lager te liggen.

We nemen in deze opgave de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 juli en de diepte d in meter.

De diepte waaronder het koud genoeg is voor de baarzen noemen we d_T . Uit de gegevens volgt dat geldt $d_T = 0,033t$. Hierbij is afgerond op drie decimalen.

a Toon aan dat deze formule klopt.

Op 1 juli is overal in het meer voldoende zuurstof aanwezig. Vanaf dat moment ontwikkelt zich door rotting van organismen op de bodem een steeds dikkere laag met te weinig zuurstof. Deze laag neemt vanaf 1 juli elke dag met 5 cm toe. De diepte waarboven er voldoende zuurstof voor de baarzen is, noemen we d_Z .

Uit de gegevens volgt dat $d_Z = 4 - 0,05t$.

b Toon dit aan.

c Onderzoek met behulp van grafieken vanaf welke datum de baarzen niet meer in het meer kunnen leven. Om de grafieken goed op het scherm te krijgen, neem je x tussen 0 en 90 en y tussen 0 en 5.

$t = 0$ is op 1 juli
 $t = 30$ is op 31 juli
 $t = 31$ is op 1 augustus
 $t = 61$ is op 31 augustus



Terugblik

Lineaire vergelijkingen oplossen

Bij het oplossen van lineaire vergelijkingen gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk zo nodig de haakjes weg.
- 2 Breng de termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
- 3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Het oplossen van de vergelijking $0,75x - 4 = 0,25(x - 3)$ gaat als volgt.

$0,75x - 4 = 0,25(x - 3)$	Werk de haakjes weg.
$0,75x - 4 = 0,25x - 0,75$	Breng $0,25x$ naar links en -4 naar rechts.
$0,75x - 0,25x = -0,75 + 4$	Herleid beide leden.
$0,5x = 3,25$	Deel door het getal dat voor x staat.
$x = 6,5$	

Lineaire ongelijkheden oplossen

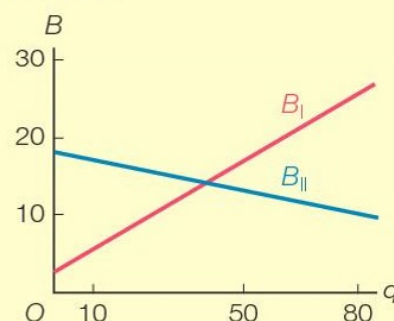
Om te weten voor welke q het bedrag $B_I = 0,3q + 2$ minder is dan het bedrag $B_{II} = -0,1q + 18$ los je de ongelijkheid $0,3q + 2 < -0,1q + 18$ op. Dit doe je door de vergelijking $0,3q + 2 = -0,1q + 18$ op te lossen en vervolgens in de figuur te kijken voor welke waarden van q de grafiek van B_I onder de grafiek van B_{II} ligt.

Het oplossen van de vergelijking geeft $q = 40$.

In de figuur zie je dat voor $q < 40$ de grafiek van B_I onder de grafiek van B_{II} ligt.

De oplossing van de lineaire ongelijkheid

$0,3q + 2 < -0,1q + 18$ is dus $q < 40$.



Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met de GR

Bij een gegeven formule kun je de grafische rekenmachine de grafiek laten tekenen. Het laten tekenen van een grafiek door de GR heet plotten.

In een uitwerking waarbij je de GR gebruikt, zijn de volgende stappen van belang.

- 1 Noteer de formules die je invoert, dus schrijf op $y_1 = \dots$ en $y_2 = \dots$
- 2 Noteer de optie(s) die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Bij het oplossen van een ongelijkheid kun je de GR gebruiken om de x -coördinaat van het snijpunt te berekenen. Vervolgens gebruik je de plot om de oplossing van de ongelijkheid af te lezen.

3.3 Lineaire formules opstellen

- 040** De lijn k heeft richtingscoëfficiënt 3.
De formule van k is te schrijven als $y = 3x + b$.

a Licht dit toe.

De lijn k gaat door het punt $(5, 22)$. Hieruit volgt de vergelijking $3 \cdot 5 + b = 22$.

b Licht dit toe.

c Bereken b en geef de formule van k .

Theorie A Lineaire formule opstellen bij gegeven rc en punt

In opgave 40 heb je een formule opgesteld van een lijn met een gegeven richtingscoëfficiënt en een punt op die lijn.

In het voorbeeld wordt gevraagd om een **vergelijking van een lijn** op te stellen. We gebruiken de begrippen formule van een lijn en vergelijking van een lijn door elkaar.

Voorbeeld

De lijn l gaat door het punt $A(10, 25)$ en $rc_l = \frac{3}{4}$.
Stel een vergelijking van l op.

Uitwerking

Vul $x = 10$ en $y = 25$ in.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(10, 25) \end{array} \right\} \frac{3}{4} \cdot 10 + b = 25$$
$$7\frac{1}{2} + b = 25$$
$$b = 17\frac{1}{2}$$

Dus $l: y = \frac{3}{4}x + 17\frac{1}{2}$.

- 41** **a** De lijn l gaat door het punt $A(5, 8)$ en $rc_l = 2$.
Stel een vergelijking van l op.

De lijn m gaat door het punt $B(18, 30)$ en $rc_m = -\frac{1}{2}$.

b Stel de formule van m op.

c Op de lijn m ligt het punt C met x -coördinaat $x_C = 50$.
Bereken de y -coördinaat y_C .

d Op de lijn m ligt het punt D met $x_D = 30$.
Bereken y_D .

A42


Van de lijn k is $rc_k = 0,5$, van de lijn l is $rc_l = 0,6$ en van de lijn m is $rc_m = 0,8$. De lijnen gaan alle drie door het punt $A(6, 10)$. Een van de lijnen snijdt de x -as tussen de punten $B(-11, 0)$ en $C(-10, 0)$. Onderzoek met een berekening welke lijn dat is.

O43


Taxibedrijf TCR rekent een bedrag per km en een vast bedrag aan voorrijkosten. Alex heeft 2 km gereden en moet 11 euro betalen. Lodewieke heeft 6 km gereden. Zij moet 21 euro betalen. Zie de punten A en B en de lijn l door deze punten in figuur 3.13.

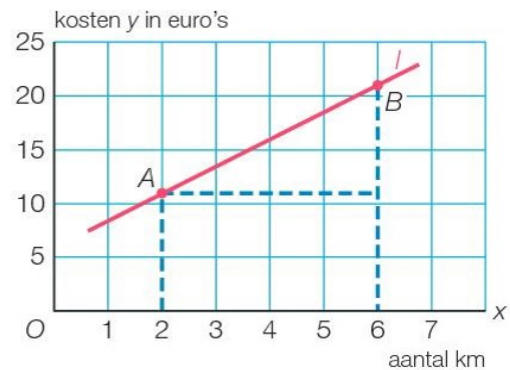
a Vul in.

Ga je op de grafiek 4 naar rechts, dan ga je ... omhoog, oftewel ga je 1 naar rechts, dan ga je ... omhoog.

b Welk getal is rc_l ?

c In figuur 3.13 is $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$. Hoeveel is $y_B - y_A$?

d Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



figuur 3.13

Theorie B Richtingscoëfficiënt berekenen

De lijn l in figuur 3.14 gaat door de punten A en B .

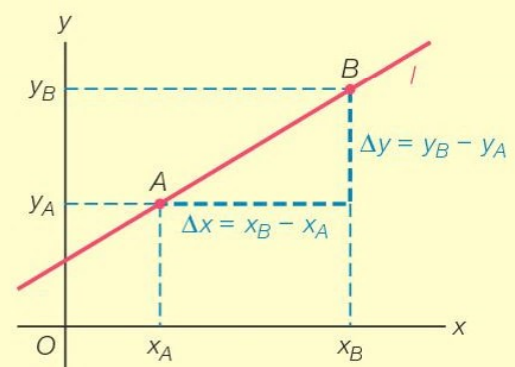
Ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog. Dus ga je 1 naar rechts, dan ga je

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

Je ziet dat

$$rc_l = \frac{\text{verschil van de } y\text{-coördinaten}}{\text{bijbehorende verschil van de } x\text{-coördinaten}}.$$

Voor het verschil van de twee y -coördinaten schrijven we Δy en voor het bijbehorende verschil van de x -coördinaten Δx .



figuur 3.14

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is de

richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Δ is de Griekse hoofdletter D, de eerste letter van differentie (= verschil). Spreek Δ uit als delta.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $P(2, -1)$ en $Q(6, 5)$.

Uitwerking

$$y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1,5x + b \\ \text{door } P(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,5 \cdot 2 + b = -1 \\ 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $l: y = 1,5x - 4$.

R44 Zie het voorbeeld.



a Lotte neemt $\Delta y = -1 - 5$.

Welke Δx hoort daarbij? Krijgt ze ook $rc_l = 1,5$?

b Lars gebruikt de coördinaten van het punt Q om b te berekenen in

$$y = 1,5x + b.$$

Welke berekening hoort daarbij?

45 Stel de formule op van de lijn



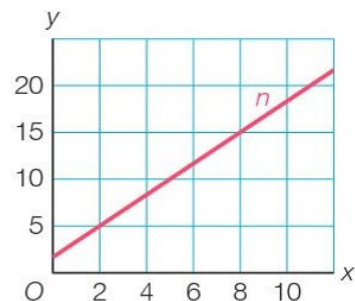
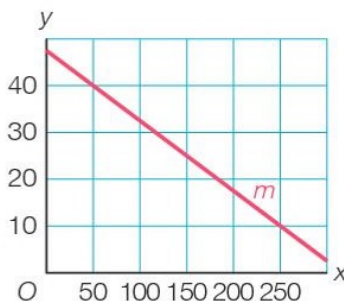
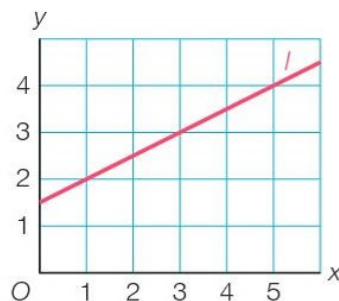
a l door $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b m door $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$

c n door $E(180, 360)$ en $F(160, 250)$

d p door $G(15, 73)$ en $H(45, 58)$.

46 Stel van elke lijn in figuur 3.15 de formule op. Kies telkens twee punten waarvan je de coördinaten goed kunt aflezen.



figuur 3.15

A47 Stel een vergelijking op van de lijn



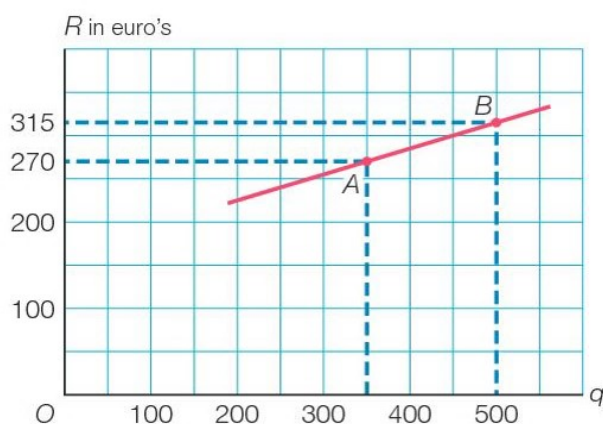
a k door de punten $A(-23, -125)$ en $B(17, 155)$

b l door de oorsprong die evenwijdig is met de lijn door de punten $C(18, -27)$ en $D(12, -30)$

c m door het punt $E(-8, 14)$ die evenwijdig is met de lijn door de punten $O(0, 0)$ en $F(-12, 4)$.

- A48** De lijn k gaat door de punten $A(2, 22)$ en $B(12, 7)$ en de lijn l gaat door de punten $C(4, 3)$ en $D(20, 43)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

- 049** Mevrouw Hak is vertegenwoordigster in bonbons. Ze ontvangt een basisloon per week en een beloning per verkochte doos. Er bestaat een lineair verband tussen het aantal verkochte dozen q en haar weekinkomen R . Bij een weekverkoop van 350 dozen is haar inkomen 270 euro en bij een weekverkoop van 500 dozen verdient ze 315 euro. Zie figuur 3.16.



figuur 3.16

- Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten A en B .
- Hoeveel verdient mevrouw Hak per doos?
- Hoeveel is haar basisloon per week?

Theorie C Lineaire formules in de praktijk

In de praktijk zijn er heel wat verbanden tussen grootheden te benaderen door lineaire formules.

Bij toepassingen gebruik je vaak andere letters dan x en y . Zo geeft de formule $B = 0,11d + 80$ aan dat er een **lineair verband** is tussen de huurprijs B van een auto en het aantal kilometers d dat je met de auto rijdt. In deze formule is B **uitgedrukt in** d .

In $R = aq + b$ is R uitgedrukt in q . Er geldt $a = \frac{\Delta R}{\Delta q}$.

In $N = at + b$ is N uitgedrukt in t . Er geldt $a = \frac{\Delta N}{\Delta t}$.

Voorbeeld

Een marktkoopman verkoopt T-shirts. De ervaring leert dat bij een prijs van 5 euro er 90 T-shirts per week verkocht worden. Bij een prijs van 8 euro is de weekverkoop nog maar 30 stuks. Er bestaat een lineair verband tussen de prijs p in euro's van een T-shirt en de weekverkoop q .

- a Druk q uit in p .
- b Bereken de prijs van een T-shirt als de weekverkoop 82 stuks is.

Uitwerking

a $q = ap + b$

Bij $p = 5$ hoort $q = 90$ en bij $p = 8$ hoort $q = 30$.

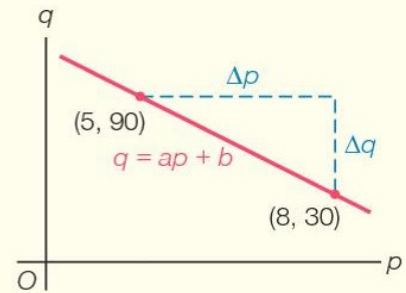
$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{30 - 90}{8 - 5} = -20$$

$$\left. \begin{array}{l} q = -20p + b \\ p = 5 \text{ en } q = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -20 \cdot 5 + b = 90 \\ -100 + b = 90 \\ b = 190 \end{array}$$

Dus $q = -20p + 190$.

b Los op $-20p + 190 = 82$
 $-20p = -108$
 $p = 5,4$

Dus € 5,40.



R50
□ ⊗ *

In het voorbeeld is q uitgedrukt in p . Je kunt ook p uitdrukken in q .

Je begint dan met $p = aq + b$ met $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$.

- a Druk p uit in q .
- b Bereken met de zojuist gevonden formule het antwoord van vraag b van het voorbeeld.

51
□ ⊗

a Tussen K en m bestaat een lineair verband.

Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.

Druk K uit in m .

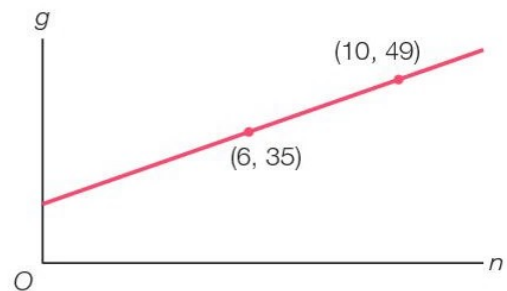
b Er bestaat een lineair verband tussen F en R .

Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.

Stel de formule op van F .

c Zie de lijn in de figuur hiernaast.

Stel een vergelijking op van deze lijn.



figuur 3.17

Tijdens een vlucht van de Airbus A310 is er na 250 km vliegen 56 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 400 km verder is dat nog 49,6 ton. Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km.

a Stel de formule op van k .

Als veiligheidsmaatregel gaat er in de cockpit een alarm af als er in de tanks nog maar 5 ton kerosine zit.

b Hoeveel km na de start gaat het alarm af?
Hoeveel km kan er dan nog gevlogen worden?

Lees het infokader over de Conconitest.

INFORMATIEF

De Conconitest

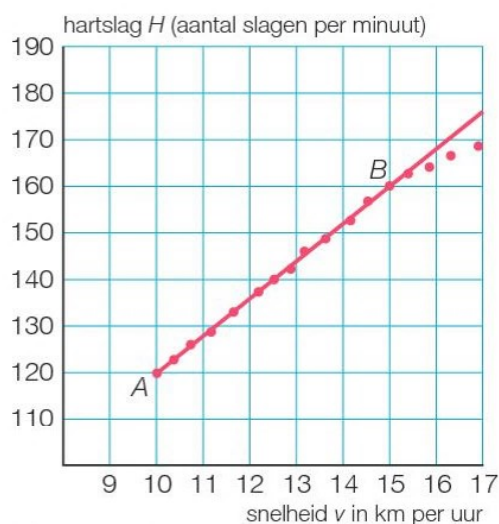
Conconi is een Italiaanse sportarts die zich intensief met het ontwikkelen van nieuwe trainingsmethoden heeft beziggehouden. Hij is vooral bekend geworden door zijn begeleiding van de wielrenner Francesco Moser die in 1984 het werelduurrecord op de baan verbeterde.

Conconi heeft een van de meest gebruikte trainingstesten ontwikkeld: de Conconitest. Hardlopers gaan om de 2 à 3 minuten sneller lopen, waarbij ze

telkens de hartslag vastleggen met een hartslagmeter. Het blijkt dat de hartslag lineair stijgt tot een zekere drempelwaarde: de anaerobe drempel. Vanaf deze drempelwaarde treedt een afbuiging van de grafiek op. Boven de anaerobe drempel treedt verzuring in de spieren op, waardoor de sporter zijn inspanning zal moeten afbreken. Sporters dienen ervoor te zorgen dat tijdens de training de hartslag iets onder de drempelwaarde blijft.

Kees doet de Conconitest. De meetresultaten zijn uitgezet in figuur 3.18. Bij een snelheid van 15,8 km per uur begint verzuring op te treden.

- a** Stel de formule op van de lijn in figuur 3.18. Gebruik de punten A en B .
- b** Bereken met de formule welke hartslag bij de anaerobe drempel van Kees hoort.
- c** Door extra training weet Kees zijn anaerobe drempel te verhogen. Tijdens de Conconitest wordt nu bij een snelheid van 12 km/uur een hartslag van 142 slagen per minuut gemeten. Zijn hartslag in rust (bij $v = 0$) is onveranderd gebleven. Bij een hartslag van 178 slagen per minuut begint verzuring op te treden. Bereken welke snelheid nu bij de anaerobe drempel van Kees hoort.



figuur 3.18

A54

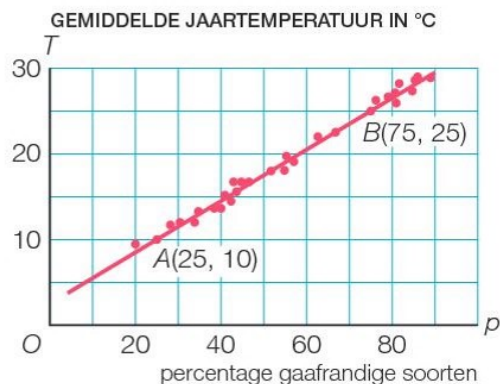

Bij bomen en planten komen gaafrandige en niet-gaafrandige bladeren voor. Opmerkelijk is dat in de tropen de meeste planten en bomen gaafrandige bladeren hebben. Verder weg van de evenaar zijn de planten met niet-gaafrandige bladeren in de meerderheid.

Onderzoek heeft uitgewezen dat er een lineair verband bestaat tussen de gemiddelde lokale jaartemperatuur en het percentage gaafrandige soorten. Het lineaire verband wordt gebruikt om met fossiele flora's de gemiddelde lokale jaartemperatuur in het verleden te bepalen.

a Stel de formule op van de gemiddelde lokale jaartemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$. Gebruik de punten A en B van de grafiek.

b Bij een onderzoek stuit men op een fossiele flora uit het Carboon, dit is de voorlaatste periode van het Paleozoïcum (350 tot 270 miljoen jaar geleden).

Van deze flora blijkt 82% uit gaafrandige soorten te bestaan. Schat de gemiddelde lokale jaartemperatuur in het Carboon.



figuur 3.19



gaafrandig



niet-gaafrandig

55


In figuur 3.20 zie je het verband tussen de productiekosten K per dag in euro's en de dagproductie q . De grafiek bestaat uit drie stukken.

a Het eerste stuk begint in $(0, 500)$ en eindigt in $(1000, 1200)$.

Stel de formule op van dit gedeelte.

b Doe dit ook voor de gedeelten II en III.

c Maak een overzicht van de formules van de productiekosten. Doe dit zoals hieronder.

Productiekosten

$$K = \dots q + \dots \quad \text{voor } q \text{ tussen } 0 \text{ en } 1000$$

$$K = \dots q + \dots \quad \text{voor } q \text{ tussen } \dots \text{ en } \dots$$

$$K = \dots q + \dots \quad \text{voor } q \text{ tussen } \dots \text{ en } \dots$$

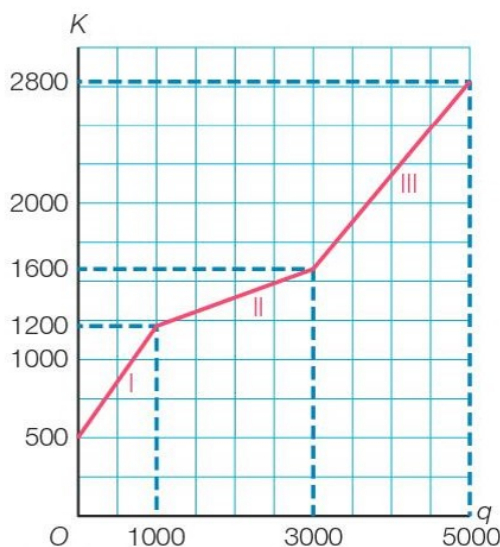
d Hoeveel procent meer zijn de productiekosten bij een dagproductie van 3500 stuks vergeleken met een dagproductie van 1500 stuks?

e De artikelen worden verkocht voor €2,60 per stuk.

Bereken de winst bij een dagproductie van 2600 stuks.

Sinds kort is de dagproductie meer dan 5000 stuks. Er blijkt dat bij een dagproductie van 7000 stuks de kosten 3500 euro per dag zijn.

f Bereken met behulp van lineair interpoleren de kosten bij een dagproductie van 6300 stuks.

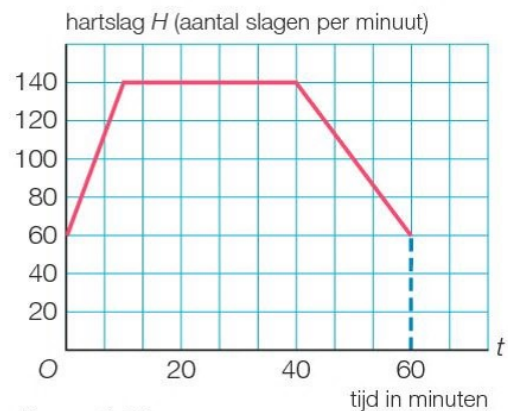


figuur 3.20

A56


Annet gaat elke week naar een sportschool. Ze begint met een warming-up van 10 minuten, waarna de work-out begint. Na afloop is een cooling down van belang voor een goed herstel. De grafiek in figuur 3.21 gaat over een bezoek van Annet aan de sportschool.

- Maak een overzicht van de formules van de hartslag zoals in opgave 55c.
- Bereken hoeveel minuten de hartslag van Annet meer dan 120 is.



figuur 3.21

A57


Iedereen die in Nederland woont, moet belasting betalen over hun belastbaar inkomen. Er zijn daarvoor vier belastingschijven. De tarieven voor 2019 staan in de tabel.

belastingsschijf	belastbaar inkomen	belastingpercentage
schijf 1	t/m 20 384 euro	36,65%
schijf 2 en 3	vanaf 20 384 t/m 68 507 euro	38,10%
schijf 4	vanaf 68 507 euro	51,75%

Voor de belasting B_1 die je moet betalen in schijf 1 geldt de formule $B_1 = 0,3665i$. Hierin is i het belastbaar inkomen.

- Licht deze formule toe.
- Bereken hoeveel belasting je moet betalen als je het maximale inkomen uit schijf 1 verdient. Rond af op gehele euro's.

Als je tussen 20 384 en 68 507 euro per jaar verdient, dan betaal je over de eerste 20 384 euro 36,65% belasting. Over de rest van het bedrag betaal je de belasting die hoort bij schijf 2 en 3.

- Bereken hoeveel belasting je moet betalen als je het maximale inkomen uit schijf 2 en 3 verdient. Rond af op gehele euro's.
- De belasting die iemand met een belastbaar inkomen dat valt in schijf 2 en 3 moet betalen noemen we B_{23} . De formule is van de vorm $B_{23} = 0,381i + b$. Bereken b . Rond af op gehelen.
- Stel de formule op van de belasting B_4 die iemand met een belastbaar inkomen dat valt in schijf 4 moet betalen.
- Mevrouw Van Sprundel heeft in 2019 een belastbaar inkomen van 78 125 euro en voor meneer Van Sprundel was dat 35 400 euro. Bereken hoeveel zij in totaal aan belasting moeten betalen. Gebruik de formules die je hebt opgesteld.



A58

De volwassen Nederlander wordt gemiddeld steeds langer en zwaarder.

In 1986 had de Nederlandse man een gemiddelde lengte van 177,5 cm en een gemiddeld gewicht van 77,6 kg. In 2016 was dat 181,1 cm en 84,5 kg. De Nederlandse vrouw woog in 2020 gemiddeld 72,0 kg. Dat was 4,5 kg meer dan in 1995. In 2020 was de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 167,5 cm. Dat was 1,3 cm meer dan in 1994.

Neem in deze opgave aan dat er lineaire verbanden bestaan tussen de tijd t in jaren en het gewicht in kg, en tussen t en de lengte in cm. Neem bovendien aan dat deze lineaire verbanden ook de komende jaren gelden. Neem $t = 0$ in het jaar 1980.

- a** Stel de formule op
 - van het gemiddelde gewicht G_m van de Nederlandse man,
 - van het gemiddelde gewicht G_v van de Nederlandse vrouw,
 - van de gemiddelde lengte L_m van de Nederlandse man en
 - van de gemiddelde lengte L_v van de Nederlandse vrouw.
- b** Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse man in het jaar dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 168 cm is.
- c** Mannen zijn gemiddeld zwaarder dan vrouwen. In 2012 was het verschil 13 kg.
Bereken in welk jaar dit verschil 14 kg zal zijn. Wat is dan het gemiddelde gewicht van de Nederlandse man?

Een bekende maat om na te gaan of er sprake is van gezond gewicht of overgewicht is de Body Mass Index (BMI). De BMI bereken je met de formule $BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$. Hierin is het gewicht in kg en de lengte in meter.

Bij een BMI van 18,5 tot 25 is sprake van normaal gewicht, bij 25 tot 27 is er licht overgewicht en bij 27 tot 30 is er matig overgewicht.

Bram beweert dat tussen 1990 en 2020 de BMI van de Nederlandse man meer gestegen is dan de BMI van de Nederlandse vrouw.

- d** Onderzoek of Bram gelijk heeft.

E59

Een koudwaterkraan, geheel geopend, vult een vat met een inhoud van 60 liter in 10 minuten. Een warmwaterkraan, ook geheel geopend, vult hetzelfde vat in 12 minuten. Een stop in de bodem van het vat zorgt ervoor dat het vat niet leegloopt. Als de stop er uit is, loopt een vol vat in 20 minuten helemaal leeg.

Als nu bij een leeg vat beide kranen geheel opengezet worden en ook de stop uit de bodem getrokken wordt, hoeveel minuten duurt het dan tot het vat vol is?

Terugblik

De richtingscoëfficiënt berekenen

Zijn van een lijn twee punten bekend, dan is de formule van de lijn op te stellen. Neem $y = ax + b$ met de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Hierin is Δy het verschil van de y -waarden en Δx het bijbehorende verschil van de x -waarden.

Bij de lineaire formule $T = as + b$ is $a = \frac{\Delta T}{\Delta s}$.

Is gegeven dat bij $s = 5$ hoort $T = 21$ en bij $s = 11$ hoort $T = 14$, dan is

$$a = \frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{21 - 14}{5 - 11} = \frac{7}{-6} = -1\frac{1}{6}.$$

De formule opstellen van een lijn door twee gegeven punten

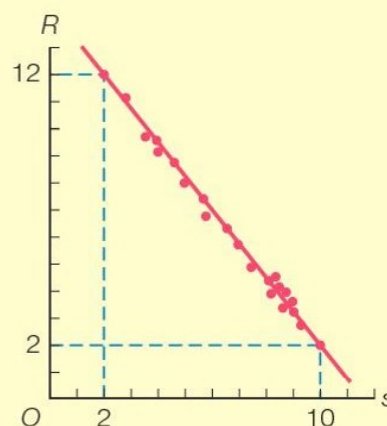
De formule van de lijn in de figuur hiernaast krijg je als volgt.

- $R = as + b$ met $a = \frac{\Delta R}{\Delta s}$
- Gebruik de punten $(2, 12)$ en $(10, 2)$ op de lijn.
$$a = \frac{\Delta R}{\Delta s} = \frac{2 - 12}{10 - 2} = -1,25$$
- $$\left. \begin{array}{l} R = -1,25s + b \\ s = 2 \text{ en } R = 12 \end{array} \right\} -1,25 \cdot 2 + b = 12, \text{ dus } b = 14,5$$

Je krijgt $R = -1,25s + 14,5$.

Hiermee is de vergelijking van de lijn opgesteld.

We zeggen ook wel dat R is uitgedrukt in s .



In de figuur hiernaast bestaat de grafiek uit drie lijnstukken. Het tweede stuk gaat door de punten $(15, 60)$ en $(40, 80)$. De bijbehorende formule vind je als volgt.

$$N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{80 - 60}{40 - 15} = 0,8$$

$t = 15$ en $N = 60$ invullen in $N = 0,8t + b$ geeft

$$0,8 \cdot 15 + b = 60, \text{ dus } b = 48.$$

De formule is $N = 0,8t + 48$.

Op dezelfde manier vind je de formules voor het eerste en laatste stuk. Je krijgt

$$N = 2\frac{2}{3}t + 20 \text{ voor } t \text{ tussen } 0 \text{ en } 15$$

$$N = 0,8t + 48 \text{ voor } t \text{ tussen } 15 \text{ en } 40$$

$$N = 4t - 80 \text{ voor } t \text{ groter dan } 40.$$



3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

O60
  *

De familie De Jong, bestaande uit twee volwassenen en drie kinderen, bezoekt de vakantiebeurs. Voor kinderen geldt een speciaal tarief. De vijf toegangskaarten kosten samen €45,-.

- Noem enkele mogelijkheden voor de prijs van een toegangkaart van een kind en van een volwassene.
- Stel dat een kaartje voor een kind x euro kost en voor een volwassene y euro.

Vul in: tussen x en y bestaat het verband $3x + 2y = \dots$

Theorie A Een variabele vrijmaken

In opgave 60 heb je de vergelijking $3x + 2y = 45$ opgesteld. Hierin kun je y **vrijmaken**. Dat gaat als volgt.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 45 && \text{Breng } 3x \text{ naar rechts.} \\ 2y &= -3x + 45 && \text{Deel alle termen door 2.} \\ y &= -1,5x + 22,5 \end{aligned}$$

Hiermee is y vrijgemaakt. Dit is hetzelfde als y uitdrukken in x .

Je ziet dat er een lineair verband bestaat tussen x en y . De grafiek van $3x + 2y = 45$ is dus een rechte lijn met richtingscoëfficiënt $-1,5$.

De vergelijking $3x + 2y = 45$ is een voorbeeld van een **lineaire vergelijking met twee variabelen**. Andere voorbeelden van lineaire vergelijkingen met twee variabelen zijn $3x - 2y = 12$ en $5p - 2q = 20$.

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De grafiek is een rechte lijn.

Voor $a = 2$, $b = -3$ en $c = 6$ krijg je $2x - 3y = 6$.

Om de bijbehorende lijn l te tekenen, bereken je de coördinaten van twee punten.

$x = 0$ geeft $2 \cdot 0 - 3y = 6$, dus $y = -2$.

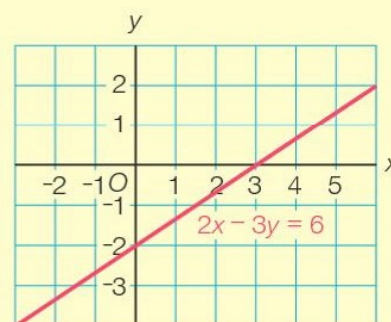
$y = 0$ geeft $2x - 3 \cdot 0 = 6$, dus $x = 3$.

Zo krijg je de tabel

x	0	3
y	-2	0

De lijn zie je in figuur 3.22.

Het punt $(9, 4)$ ligt op l , want invullen geeft $2 \cdot 9 - 3 \cdot 4 = 6$ en dit klopt. We zeggen dat $x = 9$ en $y = 4$ voldoet aan de vergelijking $2x - 3y = 6$.



figuur 3.22

Voorbeeld

Gegeven is de lijn $l: 2x - 5y = 8$.

- a Onderzoek of het punt $(14, 4)$ op l ligt.
- b Teken l .
- c Maak y vrij.

Uitwerking

- a Invullen geeft $2 \cdot 14 - 5 \cdot 4 = 8$ en dit klopt, dus $(14, 4)$ ligt op l .

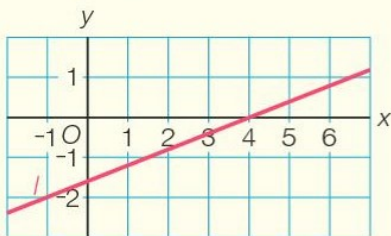
- b

x	-1	4
y	-2	0

Zoek twee roosterpunten op de lijn.

$y = 0$ geeft $2x - 5 \cdot 0 = 8$, oftewel $2x = 8$, dus $x = 4$.

$x = -1$ geeft $2 \cdot (-1) - 5y = 8$, oftewel $-5y = 10$, dus $y = -2$.



- c $2x - 5y = 8$
 $-5y = -2x + 8$
 $y = 0,4x - 1,6$

- 61** a Maak y vrij bij $15x + 12y = 2520$.
b Druk p uit in q bij $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$.
c Maak b vrij bij $5a - 2b = 16$.

- 62** Gegeven zijn de lijnen $l: 3x - y = 6$, $m: x + y = 1$, $n: x - y = 0$ en $p: x + 2y = 4$.
a Teken deze lijnen in één figuur.
b Bereken van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt.

- A63** Gegeven is de lijn $l: 4x - 3y = 24$.
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x -as en met de y -as en teken l .
b Onderzoek welke van de punten $A(8, 3)$, $B(18, 16)$ en $C(-30, -48)$ op l liggen.

- O64** a Jan koopt bij een tuincentrum twaalf coniferen en vier appelboompjes. Hij moet hiervoor €242,40 betalen. Stel dat één conifeer x euro kost en één appelboompje y euro.
Welk verband tussen x en y volgt hieruit?
b Voor een concert zijn kaartjes te koop van 10 en 15 euro. De totale opbrengst op een avond is 4300 euro.
Stel bij deze gegevens een lineaire vergelijking op met de variabelen x en y .

In een restaurant is plaats voor 52 gasten. Er zijn in totaal 19 tafels, waarvan x tafels voor vier personen en y tafels voor twee personen. Bij deze situatie horen de vergelijkingen $x + y = 19$ en $4x + 2y = 52$.

- Licht dit toe.
- Maak van beide vergelijkingen formules met y uitgedrukt in x .
- De grafieken die bij de formules horen, hebben een snijpunt. Bereken de coördinaten van dit snijpunt.
- Hoeveel tafels voor vier personen heeft het restaurant? En hoeveel tafels voor twee personen?

Theorie B Vergelijkingen met twee variabelen toepassen

In opgave 65 zag je een situatie met twee variabelen (het aantal tafels voor vier personen en het aantal tafels voor twee personen) en twee voorwaarden (het totale aantal tafels en het totale aantal personen). In veel gevallen kun je de waarden van de variabelen als volgt berekenen.

Werkschema: situaties met twee variabelen

- Noem de variabelen x en y .
- Gebruik de voorwaarden om twee vergelijkingen op te stellen.
- Maak van beide vergelijkingen formules met y uitgedrukt in x .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij deze formules.
- Gebruik de coördinaten van het snijpunt om de vraag te beantwoorden.

Voorbeeld

Meubelzaak Lefat verkoopt in een actieweek in totaal 52 tafels en stoelen. Een tafel kost 750 euro en een stoel 350 euro. De verkochte tafels en stoelen brengen tijdens de actieweek in totaal 24 600 euro op. Bereken hoeveel tafels en hoeveel stoelen in de actieweek werden verkocht.

Uitwerking

x = aantal tafels

y = aantal stoelen

$$x + y = 52, \text{ dus } y = 52 - x$$

$$750x + 350y = 24\,600, \text{ dus } 350y = -750x + 24\,600$$

$$y = -2\frac{1}{7}x + 70\frac{2}{7}$$

$$\text{Los op } 52 - x = -2\frac{1}{7}x + 70\frac{2}{7}$$

$$1\frac{1}{7}x = 18\frac{2}{7}$$

$$x = 16$$

$$y = 52 - 16 = 36 \quad \text{Neem } x = 16 \text{ in de formule } y = 52 - x.$$

Er zijn dus 16 tafels en 36 stoelen verkocht.

- 66** Op een camping wordt een barbecue gehouden.
 Kinderen betalen € 6,- en volwassenen € 8,-. In totaal brengt de barbecue € 1764,- op. Aan de barbecue doen 250 personen mee.
 Stel dat er x kinderen en y volwassenen aan de barbecue meedoen.
 Bereken hoeveel kinderen aan de barbecue meedoen.

- 67** In een envelop zitten briefjes van 5 en 10 euro. In totaal zitten er 20 briefjes in met een totale waarde van 135 euro.
 Bereken hoeveel briefjes van 5 euro en hoeveel briefjes van 10 euro er in de envelop zitten.

- 68** Rijwielhandelaar Lentink heeft in de maand april twee typen elektrische fietsen in de aanbieding gehad. Type A kostte 1575 euro en type B kostte 2025 euro. In totaal zijn er in april 38 fietsen van deze typen verkocht en deze brachten in totaal 66 150 euro op.
 Bereken hoeveel fietsen van type A en type B in de maand april zijn verkocht.

- A69** Een diëtiste moet een salade samenstellen uit tomaten en eieren. In deze salade moet voldoende vitamine A en vitamine B zitten. In de tabel zie je verdere informatie.
 Bereken uit hoeveel gram tomaat en eieren de salade moet bestaan.

	vit. A	vit. B
25 gram tomaat	2 mg	4 mg
25 gram ei	5 mg	3 mg
totaal vereist	60 mg	71 mg

- A70** Op de verjaardag van Marjan is de gemiddelde leeftijd van de 15 aanwezige personen 16,4 jaar. De jongens zijn gemiddeld 15,6 jaar en de meisjes 16,8 jaar.
 Hoeveel jongens zijn er op de verjaardag?

- A71** Meneer Welten rijdt over de snelweg van A naar B. Dat is een afstand van 85 km. Op een deel van deze route rijdt hij met de toegestane snelheid van 100 km/uur en op het andere deel rijdt hij met de toegestane snelheid van 120 km/uur. In totaal doet hij drie kwartier over de afstand van A naar B.
 Bereken hoeveel km hij met een snelheid van 120 km/uur rijdt.

- E72** Als 20 mensen samen een rekening betalen en ieder betaalt hetzelfde bedrag, dan betalen ze samen 3 euro te veel. Als 21 mensen dezelfde rekening betalen en ieder betaalt 3 euro minder, dan betalen ze samen 10 euro te veel.
 Bereken het bedrag van de rekening.



Terugblik

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

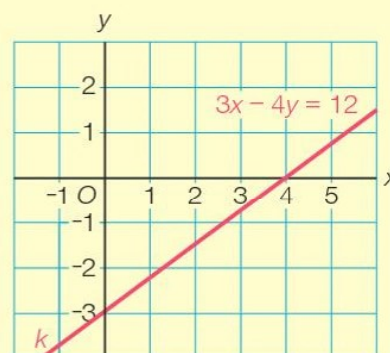
De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$.

De grafiek van $ax + by = c$ is een rechte lijn.

Om de lijn $k: 3x - 4y = 12$ te tekenen, maak je eerst een tabel met twee punten die op de lijn liggen.

Je krijgt bijvoorbeeld

x	0	4
y	-3	0



Dus de lijn gaat door de punten $(0, -3)$ en $(4, 0)$.

Het punt $A(10, 4\frac{1}{2})$ ligt op $k: 3x - 4y = 12$, want $3 \cdot 10 - 4 \cdot 4\frac{1}{2} = 12$ en dat klopt.

We zeggen dat $x = 10$ en $y = 4\frac{1}{2}$ voldoet aan de vergelijking $3x - 4y = 12$.

Bij de vergelijking $3x - 4y = 12$ kun je de variabele y vrijmaken.

$$\begin{aligned}\text{Je krijgt } 3x - 4y &= 12 \\ -4y &= -3x + 12 \\ y &= 0,75x - 3\end{aligned}$$

Vergelijkingen met twee variabelen toepassen

Bij een pretpark is de entreeprijs voor een volwassene € 18 en voor een kind € 12. Op een dag zijn er 1370 kaartjes verkocht en is er € 19 200 aan entreegeld binnengekomen. Om te berekenen hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen die dag het pretpark bezochten, ga je als volgt te werk.

Noem de variabelen x en y .

x = aantal volwassenen

y = aantal kinderen

Bij de situatie horen de vergelijkingen $x + y = 1370$ en $18x + 12y = 19\,200$.

Uit $x + y = 1370$ volgt $y = 1370 - x$.

Uit $18x + 12y = 19\,200$ volgt $12y = -18x + 19\,200$
 $y = -1,5x + 1600$

Los op $1370 - x = -1,5x + 1600$

$$0,5x = 230$$

$$x = 460$$

Dus $y = 1370 - 460 = 910$.

Dus 460 volwassenen en 910 kinderen.

Eindopdracht Man en paard

Jesse Owens (1913-1980) was een Amerikaanse atleet, die vier gouden medailles won bij de Olympische Spelen van 1936 in Berlijn: de 100 m, de 200 m, het verspringen en de 4 × 100 m estafette. Na deze Spelen werd hij uitgebuit door de Amerikaanse Atletiekfederatie en toen Jesse uiteindelijk weigerde hieraan mee te werken, werd hij geschorst. Om in zijn levensonderhoud te voorzien, deed hij aan allerlei vreemde wedstrijden mee. Zo sprintte hij in 1948 tegen een paard. Jesse won. In juli 2010 sprintte de Britse atleet Jamie Baulch tegen het paard Peopleton Brook. Jamie was gespecialiseerd in de 400 meter, maar zijn persoonlijk record op de 100 meter sprint was met 10,51 seconden ook heel behoorlijk. Jamie verloor echter van Peopleton Brook.

In deze opdracht onderzoek je hoe een race over 100 meter tussen een goede atleet en een snel paard kan verlopen. De atleet bereikt eerder zijn topsnelheid, maar het paard heeft uiteindelijk een hogere topsnelheid.

We gaan eerst uit van de volgende situatie.

De atleet heeft na 3,5 seconden 24,5 meter afgelegd en na 7,5 seconden 66,5 meter.

Het paard heeft na 6 seconden 48 meter afgelegd en na 8 seconden 72 meter.

De atleet loopt de eerste 3,5 seconden met een constante snelheid (dus de afgelegde afstand is een lineaire formule van de tijd) en vanaf 3,5 seconden tot aan de finish met een andere constante snelheid.

Het paard loopt de eerste 6 seconden met een constante snelheid en vanaf 6 seconden tot aan de finish met een andere constante snelheid.

- Onderzoek door formules op te stellen wie deze race over 100 meter wint. Hoeveel seconden voorsprong heeft de winnaar? Rond af op twee decimalen.
- Onderzoek na hoeveel seconden de atleet zijn topsnelheid moet bereiken om 0,1 seconden eerder over de finish te komen dan het paard. Rond het antwoord af op één decimaal.



Jesse Owens



Jesse Owens

Diagnostische toets

3.1 Lineaire formules

- 1** Gegeven zijn de lijnen $l: y = x - 2$, $m: y = 2 - 1,5x$ en $n: y = -1$.
- a** Schrijf van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt op.
Begin met $rc_l = \dots$
 - b** Teken de lijnen in één figuur.
- 2** De luchtdruk in een fietsband is 4,5 bar. Door een klein lek neemt de druk in de band ieder kwartier af met 6,5 kilopascal.
Stel de formule op van de luchtdruk in de band P in kilopascal, t uur na het ontstaan van het lek. Ga uit van een lineair verband en gebruik dat $1 \text{ kilopascal} = 0,01 \text{ bar}$.
- 3** Gegeven is dat y evenredig is met x .
- a** Voor $x = 10$ is $y = 17$.
Stel de formule op van y en bereken y voor $x = 45$.
 - b** Voor $x = 12$ is $y = 9,2$.
Stel de formule op van y en bereken x voor $y = 23$.

3.2 Lineaire formules vergelijken

- 4** Los op. Rond af op één decimaal.
- a** $3x + 2 = 2 - 4(x - 3)$
 - b** $120q + 840 = 144 - 60q$
 - c** $0,2(a - 7) = 0,4 - (3,1 - a)$
 - d** $0,16(p + 5) = 0,05p - 3,44$
- 5** Bij de Nederlandse Spoorwegen kun je een abonnement nemen waarmee je in de spits 20% korting krijgt. De kosten voor dit abonnement zijn € 24,- per maand. Marlies gebruikt de trein om een aantal dagen per week naar haar werk en terug te reizen. Ze reist alleen in de spits. Het reguliere tarief van deze rit is € 7,50 voor een enkele reis. Neem aan dat Marlies n keer per maand met de trein naar haar werk gaat.
- a** Stel de formule op voor de maandelijkse kosten K_z in euro's als Marlies besluit geen abonnement te nemen. Doe dat ook voor de maandelijkse kosten K_a als ze het abonnement wel neemt.
 - b** Bereken voor welk aantal keren retour reizen per maand de reiskosten van Marlies met en zonder abonnement gelijk zijn.
- 6** Rond in deze opgave af op twee decimalen.
Gegeven zijn de formules $A = -7,14t + 74$, $B = -1,11t + 22,22$ en $C = \frac{-41t + 565}{10,5}$.
- a** Bereken voor welke waarden van t geldt dat $B > C$.
 - b** Bereken voor welke waarden van t geldt dat $B < A < C$.

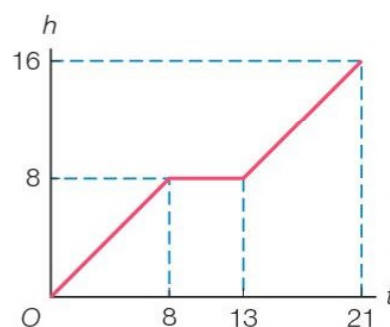
3.3 Lineaire formules opstellen

- 7** De lijn l gaat door het punt $A(3, -7)$ en $rc_l = -1,25$.
Stel de formule van l op.

- 8** Stel de formule op van de lijn door de punten

- a** $A(2, 3)$ en $B(8, -2)$
- b** $C(-1, 2)$ en $D(2, 0)$.

- 9** Schepen die vanuit de Golf van Panama het Panamakanaal invaren worden door de sluizen van Miraflores in twee stappen naar een hoogte van 16 meter boven zeeniveau gebracht. In de figuur hiernaast zie je het verband tussen de hoogte van een schip boven zeeniveau h in meters en de tijd t in minuten. Hierbij is $t = 0$ het moment waarop het schip begint te stijgen.



figuur 3.23

- a** Maak een overzicht van de formules van de hoogte van een schip in de sluizen van Miraflores.
- b** Na hoeveel minuten bevindt een schip zich op een hoogte van 13 meter boven zeeniveau?

Schepen die de andere kant op varen leggen het traject in precies dezelfde tijd omgekeerd af. Deze schepen bevinden zich op $t = 0$ op een hoogte van 16 meter boven zeeniveau.

- c** Maak ook voor deze schepen een overzicht van de formules.

3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

- 10** **a** Maak q vrij bij $5p - 3q = 9$.
b Druk T uit in t bij $7,5T + 22,5t = 15$.
- 11** Gegeven is de lijn l met vergelijking $5x - 4y = 40$.
a Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn l .
b Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x -as en met de y -as en teken l .
c Onderzoek welke van de punten $A(9; 1,2)$, $B(18; 12,5)$ en $C(-28, -45)$ op l liggen.
- 12** Koffiebrander Ari verkoopt een melange van twee soorten koffiebonen. De ene soort kost € 5,- per 250 gram en de andere kost € 7,50 per 250 gram. Ari maakt in totaal 30 kg van de melange met een totale prijs van € 786. Hoeveel kilogram van de duurste bonen zitten er in de melange?